הטכניון – הפקולטה למתמטיקה
חדו"א 1מ 104018
מבחן מועד ב סמסטר חורף 3.3.2017

משך המבחן שלוש שעות, ללא חומר עזר (כולל מחשבונים).
במבחן 5 שאלות. יש לפתור את כולן. יש לרשום פתרונות מנומקים, **בעט כחולה או שחורה (לא אדומה)**, על גבי דפים אלו. אין לצרף מחברת נוספת או מחברת טיוטה.
מי שכותב "לא יודע" **בלבד** כתשובה לסעיף יקבל 20% מניקוד הסעיף.

בהצלחה

שאלה 1 (20%) חשבו את הגבולות הבאים אם הם קיימים, ואם הם לא קיימים, הסבירו מדוע.

א. (10%) נתון כי $f(x)$ מוגדרת לכל x וגזירה רק בנקודה -1 ומתקיים $f'(-1) = -2$. מהו

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(-1+2x)-f(-1-3x)}{4x}$$

פתרון:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(-1+2x)-f(-1-3x)}{4x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(-1+2x)-f(-1)+f(-1)-f(-1-3x)}{4x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{f(-1+2x)-f(-1)-(f(-1-3x)-f(-1))}{4x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{f(-1+2x)-f(-1)}{4x} - \frac{f(-1-3x)-f(-1))}{4x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\cdot\frac{f(-1+2x)-f(-1)}{2x} + \frac{3}{4}\frac{f(-1-3x)-f(-1))}{-3x} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot f'(-1) + \frac{3}{4}\cdot f'(-1) = \frac{5}{4}\cdot(-2) = -\frac{5}{2}$$

ב. (10%)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{n}^n\cos(\pi\mathrm{n})}{(n+1)^{n+1}}(n+3)$$

פתרון: $\cos(\pi n)=(-1)^n$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{n}^n(n+3)}{(n+1)^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{n}^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n+3}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{n}^n}{(n+1)^n}\cdot\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1+\frac{3}{n}}{1}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{(n+1)^n}{n^n}}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\cdot\frac{1+\frac{3}{n}}{1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\cdot\frac{1+\frac{3}{n}}{1}=\frac{1}{e}$$

לכן הגבול של כל תת סדרה של $\frac{\mathrm{n}^n(n+3)}{(n+1)^{n+1}}$ הוא גם $\frac{1}{e}$. לכן עבור תת הסדרה של האינדקסים הזוגיים נקבל

$$a_{2k}=\frac{(2k)^{2k}\cos(\pi 2\mathrm{k})}{(2k+1)^{2k+1}}(2k+3)=\frac{(2k)^{2k}}{(2k+1)^{2k+1}}(2k+3)\to\frac{1}{e}$$

ועבור תת הסדרה של האינדקסים האיזוגיים נקבל

$$a_{2k-1}=\frac{(2k-1)^{2k-1}\cos\big(\pi(2\mathrm{k}-1)\big)}{(2k-1+1)^{2k-1+1}}(2k-1+3)=-\frac{(2k-1)^{2k-1}}{(2k-1+1)^{2k-1+1}}(2k-1+3)$$
$$\to-\frac{1}{e}$$

ולכן הגבול אינו קיים.

שאלה 2 (20%)

א. (10%) האם האינטגרל המוכלל הבא מתכנס

$$\int_0^\infty \frac{dx}{2x^{\frac{1}{3}}+3x^3}$$

פתרון:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{2x^{\frac{1}{3}}+3x^3} = \int_0^1 \frac{dx}{2x^{\frac{1}{3}}+3x^3} + \int_1^\infty \frac{dx}{2x^{\frac{1}{3}}+3x^3}$$

הפונקציה $\frac{1}{2x^{\frac{1}{3}}+3x^3}$ חיובית על החיוביים ולכן אפשר להשתמש במבחן ההשוואה הגבולי.

עבור המחובר הראשון, נשווה עם $g(x) = x^{-\frac{1}{3}}$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{2x^{\frac{1}{3}}+3x^3}}{x^{-\frac{1}{3}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2+3x^{\frac{8}{3}}} = \frac{1}{2}$$

ולכן האינטגרלים $\int_0^1 \frac{dx}{2x^{\frac{1}{3}}+3x^3}$, $\int_0^1 \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}}$ מתכנסים ביחד או מתבדרים ביחד, אבל $\int_0^1 \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}}$ מתכנס כי $p = \frac{1}{3} < 1$ ולכן האינטגרל $\int_0^1 \frac{dx}{2x^{\frac{1}{3}}+3x^3}$ מתכנס.

עבור המחובר השני, נשווה עם $g(x) = x^{-3}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{2x^{\frac{1}{3}}+3x^3}}{x^{-3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x^{-\frac{8}{3}}+3} = \frac{1}{3}$$

ולכן האינטגרלים $\int_1^\infty \frac{dx}{2x^{\frac{1}{3}}+3x^3}$, $\int_1^\infty \frac{dx}{x^3}$ מתכנסים ביחד או מתבדרים ביחד, אבל $\int_1^\infty \frac{dx}{x^3}$ מתכנס כי $p = 3 > 1$ ולכן האינטגרל $\int_1^\infty \frac{dx}{2x^{\frac{1}{3}}+3x^3}$ מתכנס. לכן האינטגרל $\int_0^\infty \frac{dx}{2x^{\frac{1}{3}}+3x^3}$ מתכנס.

ב. (10%) האם הטור הבא מתכנס:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right)$$

פתרון: האברים של הטור חיוביים ולכן אפשר להשתמש במבחן ההשוואה הגבולי.

$a_n = n \cdot ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right), b_n = \frac{1}{n^2}$. נשים לב כי

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} =_L \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1$$

ולכן, לפי היינה, עבור $x_n = \frac{1}{n^3} \to 0$ נקבל כי

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right)}{\frac{1}{n^3}} = 1$$

ולכן לפי מבחן ההשוואה הגבולי, הטורים $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right), \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ מתכנסים או מתבדרים ביחד, וכיוון שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ מתכנס, כיוון ש- $p = 2 > 1$ אז הטור שלנו מתכנס.

שאלה 3 (30%) בכל סעיף של שאלה זו אפשר להשתמש בסעיף קודם, גם אם לא הוכחתם אותו.

א. (5%) צטטו את משפט רול.

ב. (13%) הוכיחו את משפט רול.

ג. (12%) מצאו את מספר הפתרונות של המשוואה

$$x^2 = 3 - e^{-x^2}$$

פתרון: נסתכל על הפונקציה $f(x) = x^2 - 3 + e^{-x^2}$. פונקציה זו רציפה (כי אלמנטרית) וגזירה (כי סכום, הפרש והרכבה של גזירות). אנו מחפשים את מספר הפתרונות למשוואה $f(x) = 0$.
נשים לב כי

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty \qquad f(0) = -2$$

וכי

$$f'(x) = 2x - 2xe^{-x^2} = 2x(1 - e^{-x^2})$$

ולכן הנגזרת מתאפסת רק עבור $x = 0$.
כאשר $x < 0$ אז $2x < 0$ וגם $1 - e^{-x^2} > 0$ ולכן $f'(x) < 0$ ולכן לפי מסקנות לגרנג' נובע כי $f(x)$ יורדת ממש בקטע $(-\infty, 0]$ ובפרט חח"ע מה שאומר שבקטע זה למשוואה $f(x) = 0$ יש פתרון אחד לכל היותר (והוא אינו $x = 0$). בנוסף כיוון ש-$f(x)$ רציפה וגם $f(0) = -2, f(-3) = 9 - 3 + e^{-9} > 0$ אז לפי משפט ערך הביניים יש $-3 < c < 0$ המקיים $f(c) = 0$ ולכן יש בדיוק אחד כזה בקטע $(-\infty, 0)$.
כאשר $x > 0$ אז $2x > 0$ וגם $1 - e^{-x^2} > 0$ ולכן $f'(x) > 0$ ולכן לפי מסקנות לגרנג' נובע כי $f(x)$ עולה ממש בקטע $[0, \infty)$ ובפרט חח"ע מה שאומר שבקטע זה למשוואה $f(x) = 0$ יש פתרון אחד לכל היותר (והוא אינו $x = 0$). בנוסף כיוון ש-$f(x)$ רציפה וגם $f(0) = -2, f(3) = 9 - 3 + e^{-9} > 0$ אז לפי משפט ערך הביניים יש $0 < d < 3$ המקיים $f(d) = 0$ ולכן יש בדיוק אחד כזה בקטע $(0, \infty)$.
כיוון ש- $f(0) = -2 \neq 0$ אז יש בדיוק שני פתרונות.

שאלה 4 (20%) ציון שאלה זו נחשב גם כציון מגן נפרד של 15%.

א. (5%) הגדירו: $\lim_{x\to a} f(x) = L$

ב. (15%) הוכיחו לפי הגדרה $\lim_{x\to -1} \frac{x}{2x+1} = 1$

פתרון: צ"ל שלכל $\epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שכאשר $0 < |x+1| < \delta$ אז $\left|\frac{x}{2x+1} - 1\right| < \epsilon$.

יהי $\varepsilon > 0$.

$$\left|\frac{x}{2x+1} - 1\right| = \frac{|x-2x-1|}{|2x+1|} = \frac{1}{|2x+1|} \cdot |x+1|$$

עבור $\delta > 0$, כאשר $0 < |x+1| < \delta$ אז

$$-1-\delta < x < -1+\delta$$
$$-2-2\delta < 2x < -2+2\delta$$
$$-1-2\delta < 2x+1 < -1+2\delta$$

ולכן תחת ההנחה הנוספת כי $\delta \le \frac{1}{4}$ נקבל כי

$$-\frac{3}{2} \le -1-2\cdot\frac{1}{4} \le -1-2\delta < 2x+1 < -1+2\delta \le -1+2\cdot\frac{1}{4} \le -\frac{1}{2}$$

ולכן

$$\frac{1}{2} \le |2x+1| \le \frac{3}{2}$$

ולכן

$$\frac{2}{3} \le \frac{1}{|2x+1|} \le 2$$

ולכן כאשר $0 < |x-1| < \delta$ וגם $0 < \delta \le \frac{1}{4}$ אז

$$\left|\frac{x}{2x+1} - 1\right| = \frac{|x-2x-1|}{|2x+1|} = \frac{1}{|2x+1|} \cdot |x+1| < 2\delta$$

ולכן עבור $\delta = \min\{\frac{1}{4}, \frac{\epsilon}{2}\}$ נקבל כי כאשר $0 < |x-1| < \delta$ אז $\left|\frac{x}{2x+1} - 1\right| < \epsilon$.

שאלה 5 (10%) הוכיחו כי $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$ לכל $x > 0$.

פתרון: נשתמש בפולינום טיילור. עבור $x > 0$

$$f(x) = e^x = T_2(x) + R_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + R_2(x)$$

כאשר קיים $0 < c < x$ עבורו

$$R_2(x) = \frac{e^c}{3!}x^3$$

אבל $e^c > 0$ ועבור $x > 0$ מתקיים כי $x^3 > 0$ ולכן עבור $x > 0$

$$R_2(x) = \frac{e^c}{3!}x^3 > 0$$

מה שנותן שעבור $x > 0$

$$f(x) = e^x = T_2(x) + R_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + R_2(x) > 1 + x + \frac{x^2}{2}$$